Prüfungsvorbereitung: Abitur-Wiederholung Analysis März 2012

1.) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = (2-x) \cdot \ln(2-x)$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und lokale Extrempunkte! Geben Sie diese gegebenenfalls an!

b) Ermitteln Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$!

c) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1 \le x < 2$!

d) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{4} \cdot (2-x)^2 \cdot [1 - 2\ln(2-x)] - 2012$ eine Stammfunktion von f ist!

e) Weisen Sie nach, dass der Inhalt der Fläche, die im I. Quadranten vom Graphen von f und den Koordinatenachsen vollständig begrenzt wird, $\left(\ln 4 - \frac{3}{4}\right)$ FE beträgt!

f) Der Graph einer quadratischen Funktion q verläuft durch den Punkt $P_0(0; 2\ln 2)$ und hat den lokalen Minimumpunkt $P_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\ln 2\right)$.
Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktion!

g) Durch den Punkt $P(u; q(u))$ mit $0 < u < 1$ werden die Parallelen zu den Koordinatenachsen gezeichnet. Diese Parallelen und die Koordinatenachsen begrenzen ein Rechteck.
Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird! Geben Sie diesen maximalen Flächeninhalt an!

2.) Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{8x + 16}{x^2}$ $(x \in R;\ x \ne 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie auf lokale Extrempunkte! Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte!
Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$!

b) Der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten und stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Wendetangente t auf! (Auf den Nachweis des Wendepunktes wird verzichtet.)

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-8 \le x \le 8$! Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten an!

d) Eine Gerade g und der Graph von f verlaufen durch die Punkte $A(-2;0)$ und $Q(-4;-1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden!
Die Gerade g und der Graph von f haben einen dritten Punkt S gemeinsam. Berechnen Sie dessen Koordinaten!

e) Der Graph einer Funktion h mit $h(x) = -0{,}5x^2 + x + 2$ hat mit dem Graph der Geraden g die Punkte $B(-1; 0{,}5)$ und C(2; 2) gemeinsam.
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das von diesen beiden Graphen vollständig eingeschlossen wird!

f) Der Graph einer quadratischen Funktion q mit q(0) = q(2) = 4 hat in E(1; 5) einen lokalen Extrempunkt.
Geben Sie die Gleichung dieser quadratischen Funktion q an! Vergleichen Sie die Funktionen q und h miteinander!

g) Die Gerade g, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(u > -2)$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck, das bei Rotation um die x-Achse einen Kreiskegel erzeugt. Für welche reellen Zahlen u beträgt das Volumen dieses Kegels $\frac{2}{3}\pi$ VE?